Cálculo II **lista 08** - 4 de novembro de 2010
Revisão da matéria **tarcisio.praciano@gmail.com**
prof. T. Praciano-Pereira **Dep. de Computação** UeVA

alun@:

www.multivariado.sobralmatematica.org
Documento produzido com LaTeX sis. op. Debian/Gnu/Linux

Data da entrega da lista: dia 8 de Novembro , segunda-feira.

0.1 Objetivo

Revisão da matéria e uma oportunidade final para melhorar sua nota!

Ficou faltando um assunto, que é o que agora vou discutir: séries de Fourier. Vou evitar de fazer referência à terminologia série, porque ela exigiria uma discussão que não vou ter tempo de fazer, ficarei com a denominação polinômios trigonométricos para a qual vou ter tempo suficiente.

Os polinômios trigonométricos estão associados, junto com outra transformação que é bem semelhante a esta, com as nossas comunicações.

Historicamente, até os anos 50 do século passado, eles eram a única forma de fazer comunicações (de codificar as comunicações e transmití-las) por sua íntima associação com as ondas eletromagnéticas. Hoje eles perderam um pouco deste espaço, seguem sendo a linguagem de máquina das telecomunicações, que continuam sendo eletromagnéticas como meio, mas perderam o espaço de codificação para outros métodos que foram construídos à imagem e semelhança dos polinômios trigonométricos, em particular com uma transformação novíssima, descoberta (adquiriu o nome) em 1980, as wavelets, que são uma generalização dos "polinômios trigonométricos" no sentido de que as ondas básicas foram substituidas por diversas outras que melhor se adaptam ao tipo de objeto que se deseje codificar.

Porém os polinômios trigonométricos ainda são importantes em duas áreas que é do máximo interesse para quem estuda computação: codificação de dados, análise de imagens.

Antes, com os polinômios trigonométricos apenas um tipo de onda básica era utilizada, o seno (o coseno é um seno translatado) e as aceleradas do seno e do coseno. Uma mulher, *Daubechies*, descobriu um tipo de onda que tem uma adaptação muito grande para a voz humana e para o ouvido humano, e com ela se pode decodificar com maior precisão (com uma quantidade menor de amostras), transmitindo-se uma quantidade pequena de informações para decodificar do outro lado e obter uma reprodução muito mais perfeita (para a voz humana ou para o ouvido humano).

Você pode encontrar muita referênca sobre o assunto procurando pelo nome de *Daubechies* ou *wavelets*.

0.1.1 Os coeficientes de Fourier

Há uma forma bem simples de explicar o que são os coeficientes de Fourier. É simples logo se corre o risco de uma super simplificação deixando uma distorção no conceito. Vou procurar superar o risco. Os coeficientes de Fourier são o "tamanho"da projeção de uma função, uma onda eletromagnética, por exemplo, na direção de uma onda básica, uma senoide acelerada. Vou trocar isto em miúdos.

As ondas básicas

Primeiro que tudo selecionamos algumas funções como sendo as mais simples de um certo contexto. Você já viu isto no caso dos polinômios de Taylor em que os polinômios $(x-a)^n$ foram considerados os mais simples. Então um polinômio de Taylor é uma soma das combinações lineares das "projeções" de uma certa função na direção das "ondas básicas"

Aqui, eu estou usando onda como sinônimo de função!

Uma onda eletromagnética é uma função. A recíproca é que é difícil de aceitar, que qualquer função seja uma "onda eletromagnética"... e realmente é uma afirmação discutível! Discutível mas não é totalmente absurda! Então os polinômios de Taylor são um vetor obtido como combinação linear de vetores básicos, $(x-a)^n$ tendo como coeficientes o tamanho da projeção de uma função f na direção destes vetores.

Esta comparação não é boa porque não temos um meio explicar esta projeção uma vez que projeções estão associadas ao produto escalar entre dois vetores, e não é este bem o caso dos polinômios de Taylor.

Apenas estou usando os polinômios de Taylor para começar a discussão porque eles são muito cedo produzidos e apresentados nos cursos de Cálculo apesar de que nem sempre os professores consigam transmitir a idéia de que eles estão associados aos fênomenos da Álgebra Linear como combinação linear de vetores básicos com coeficientes obtidos por uma certa operação - as derivadas sucessivas.

Quer dizer que eu estou procurando me inserir no contexto de um vetor f, uma onda, e de sua projeção num sub-espaço definido por uma coleção de vetores básicos (ondas básicas) os polinômios trigonométricos são senos e cosenos acelerados:

$$\sin(nt), \cos(nt);$$

aqui a aceleração é o número inteiro positivo n.

As ondas eletromagnéticas básicas

Vou deixar para trás os polinômios de Taylor e me concentrar no espaço vetorial gerado pelas ondas básicas

$$\sin(nt), \cos(nt);$$

Um resultado fundamental é que estas duas ondas são ortogonais uma conta relativamente fácil de fazer. Ela é objeto de uma das questões:

$$< \sin, \cos >= 0 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t)\cos(t)dt \tag{1}$$

Na questão estou @ conduzindo a se recordar do que é necessário sobre as funções trigonométricas. Tente, seja com mudança de variáveis, observando que a derivada do

$\sin(t)$ é $\cos(t)$, ou com propriedades geométricas, agora observando que $f(t) = sin(t)$ é uma função par e que $g(t) = \cos(t)$ é uma função impar , isto deve conduzí-l@ a ver que esta integral é zero.

A definição de polinômio trigonométrico se encontra na questão 3ª).

Podemos mostrar, e é possível que você tenha visto isto em Álgebra Linear, que esta fórmula, equação (1) define um produto escalar. Na equação (1) estou usando a expressão com dois vetores particulares cujo produto escalar é zero, a fórmula geral seria

$$< f, g >= \int_{-\pi}^{\pi} ft)g(t)dt \tag{2}$$

e quando as duas "ondas" f, g forem perpendiculares, então $< f, g >= 0$ como é o caso do $\sin, \cos$.

É até bem possível que você tenha imaginado que @ professor tenha inventado apenas uma fórmula a mais para lhe causar problemas na prova, ou uma generalização gratuita do produto escalar entre vetores do plano ou do espaço que serve, num visão geométrica fácil, para discutir o ângulo entre vetores. Bom, as funções são vetores, as funções do Cálculo são vetores de um espaço de dimensão não finita! Nada de muito extranho nisto, um polinômio de grau cinco é um elemento de um espaço vetorial de dimensão maior ou igual a cinco. Para conseguirmos boas aproximações com polinômios de Taylor (de MacLaurin) das funções trigonométricas que você usa quando aperta um botão de calculadora, precisamos de polinômios de Taylor de grau 17, elementos de um espaço vetorial de dimensão maior ou igual a 17. Você já está rodeado de objetos, de vetores, de espaços com dimenção alta! somente precisa se acostumar com a idéia. Nada disto tem uma tradução geométrica em termos de nossa prisão tridimensional, as tentativas de fazer esta adaptação não resultam em nada muito interessante, sobretudo porque o que nos interessa não é a dimensão quatro, mas sim, pelo menos, a dimensão 17.

O program fourier.gnuplot mostra a aproximação de uma função por uma sucessão de seu polinômios trigonométricos.

Palavras chave integral, derivada, funções multivariadas.

0.2 Exercícios

1. Gradiente $F(x, y) = \frac{x+y}{1+x^2+y^2}$ Definindo

$$\begin{cases} u(x, y) = x + y; \\ v(x, y) = 1 + x^2 + y^2; \\ F(x, y) = \frac{u(x,y)}{v(x,y)} \end{cases}$$

   (a) (V)[ ](F)[ ]

$$F_x(x, y) = [u_x(x, y)v(x, y) - u(x, y)v_x(x, y)] / v(x, y)$$

   (b) (V)[ ](F)[ ]

$$F_x(x, y) = [u_x(x, y)v(x, y) - u(x, y)v_x(x, y)] / v(x, y)^2$$

   (c) (V)[ ](F)[ ]

$$F_y(x, y) = [u_y(x, y)v(x, y) - u(x, y)v_y(x, y)] / v(x, y)^2$$

   (d) (V)[ ](F)[ ] O domínio de F é o plano todo. Considere um ponto do plano, um ponto dado, $P = (a, b)$.

$$\begin{cases} A = F_x(a, b); B = F_y(a, b); \\ P(x, y) = F(a, b) - A(x - a) - B(y - b) \end{cases}$$

   P é a equação do plano tangente ao gráfico de F no ponto $(a, b, F(a, b))$.

   (e) (V)[ ](F)[ ] O domínio de F é o plano todo. Considere um ponto do plano, um ponto dado, $P = (a, b)$.

$$A = F_x(a, b); B = F_y(a, b);$$

   O vetor $(A, B, -1)$ é perpendicular à superfície no ponto $(a, b, F(a, b))$.

2. O Teorema Fundamental do Cálculo

   (a) (V)[ ](F)[ ]

$$u(x) = sin(x); du = cos(x)dx; \tag{3}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) \cos(x)dx = 0 \tag{4}$$

   (b) (V)[ ](F)[ ]

$$I = \int_{0}^{\pi} \sin(x) \cos(x)dx = \int_{0}^{\pi} \sin(2x)dx \tag{5}$$

$$I = \int_{0}^{\pi} \sin(2x)d2x = \int_{0}^{\pi} \sin(t)dt = 0 \tag{6}$$

(c) (V)[ ](F)[ ]

$$I = \int_0^{\pi} \sin(x)\cos(x)dx = \int_0^{\pi} \sin(2x)dx \tag{7}$$

$$I = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin(2x)d2x = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin(t)dt = \tag{8}$$

$$I = -\tfrac{1}{2}cos(t)|_0^{\pi/2} = 1 \tag{9}$$

(d) (V)[ ](F)[ ]

$$I = \int_0^{2\pi} (\cos^2(x) - \sin^2(x))dx = \int_0^{2\pi} sin(2x)dx \tag{10}$$

$$I = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(2x)d2x = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin(t)dt = 0 \tag{11}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(x)dx = \int_0^{2\pi} \sin^2(x)dx \tag{12}$$

$$\int_0^{2\pi} (\cos^2(x) + \sin^2(x))dx = \int_0^{2\pi} dx = 2\pi \tag{13}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(x)dx = \pi \tag{14}$$

(e) (V)[ ](F)[ ]

$$I = \int_0^{2\pi} (\cos^2(x) - \sin^2(x))dx = \int_0^{2\pi} sin(2x)dx \tag{15}$$

$$I = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(2x)d2x = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin(t)dt = 0 \tag{16}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(x)dx = \int_0^{2\pi} \sin^2(x)dx \tag{17}$$

$$\int_0^{2\pi} (\cos^2(x) + \sin^2(x))dx = \int_0^{2\pi} dx = 2\pi \tag{18}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(x)dx = \pi \tag{19}$$

3. Polinômios trigonométricos $f(x) = \|x\|$ e os coeficientes a_k e b_k são os coeficientes de Fourier de f tal que

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

é o polinômio trigonométrico de f no intervalo $[-\pi, \pi]$.

(a) (V)[ ](F)[ ] $a_0 = \pi$

(b) (V)[ ](F)[ ] $a_0 = \frac{\pi}{2}$

(c) (V)[ ](F)[ ] $a_1 = -4/\pi;\ b_1 = 0;$

(d) (V)[ ](F)[ ] $a_2 = 0;\ b_2 = 0;$

(e) (V)[ ](F)[ ] $a_n = \begin{cases} \text{Se } n \text{ par } 0; \\ \text{Se } n \text{ impar } \frac{-4}{\pi n^2}; \end{cases}$; $b_n = 0;$

O programa "`exer_naf_04.gnuplot`" mostra o gráfico deste polinômio trigonométrico, procure no link "programas".

4. Integral múltipla

$$u(x,y) = x^2 - 3xy + y^2; v(x,y) = 1 + x^2 + y^2;$$
$$P(x,y) = \tfrac{u_x(x,y)v(x,y) - u(x,y)v_x(x,y)}{v(x,y)^2}; Q(x,y) = \tfrac{u_y(x,y)v(x,y) - u(x,y)v_y(x,y)}{v(x,y)^2};$$
$$F(x,y) = \tfrac{u(x,y)}{v(x,y)}$$

(a) (V)[ ](F)[ ] Se γ for uma curva , fechada, cujo comprimento seja finito, no plano $\bar{X}OY$ então

$$\oint_{\gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

(b) (V)[ ](F)[ ] Se $\mathcal{W}$ for uma região limitada do plano com uma fronteira diferenciável (contínua e macia) então

$$\int\int_{\mathcal{W}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 0$$

(c) (V)[ ](F)[ ]

$$\int\int_{\mathcal{W}} (F_{xy} - F_{yx})\, dxdy = 0$$

(d) (V)[ ](F)[ ]

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dxdy}{v(x,y)^2} = \frac{\pi}{2}$$

(e) (V)[ ](F)[ ]

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dxdy}{v(x,y)^2} = \pi$$

5. Integral múltipla $\mathcal{U}$ é o disco unitário centrado na origem.

   (a) (V)[ ](F)[ ] O domínio de

   $$F(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

   é o plano XOY

   (b) (V)[ ](F)[ ]

   $$\int_{\mathcal{U}}\int \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \pi$$

   (c) (V)[ ](F)[ ]

   $$\int_{\mathcal{U}}\int \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 2\pi$$

   (d) (V)[ ](F)[ ]

   $$\int_{\mathcal{U}}\int \sqrt{x^2+y^2}dxdy = \frac{2\pi}{3}$$

   (e) (V)[ ](F)[ ]

   $$\int_{\mathcal{U}}\int \sqrt{x^2+y^2}dxdy = \frac{\pi}{3}$$

6. Integral múltipla

   (a) (V)[ ](F)[ ]

   $$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 cos(y)dxdy < 1$$

   (b) (V)[ ](F)[ ]

   $$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 cos(y)dxdy > -2$$

   (c) (V)[ ](F)[ ]

   $$\int_{-3}^{3}\int_{-3}^{3} x^2 + 3xy + y^3 dxdy < 10$$

   (d) (V)[ ](F)[ ]

   $$\int_{-3}^{3}\int_{-3}^{3} x^2 + 3xy + y^3 dxdy = 0$$

   (e) (V)[ ](F)[ ]

   $$\int_{-3}^{3}\int_{-3}^{3} x^2 + 3xy + y^3 dxdy = 108$$