Cálculo II | **Lista 06**, 12 de outubro de 2010
assunto desta lista | **tarcisio.praciano@gmail.com**
prof. T. Praciano-Pereira | **Dep. de Computação** UeVA

alun@:

www.multivariado.sobralmatematica.org
Documento produzido com LaTeX | sis. op. Debian/Gnu/Linux

Data da entrega da lista: dia 18 de Outubro, segunda-feira.

0.1 Objetivo

Notações:
Nesta lista

$$(P(x,y),Q(x,y)) = J(F) = (F_x, F_y)$$

e em algumas questões (P,Q) pode deixar de ser o gradiente de F para testar alguma fórmula.

$\mathcal{D}$ será uma região limitada do plano, $\gamma = \partial\mathcal{D}$ é uma curva, a fronteira de $\mathcal{D}$ que vamos supor diferenciável e integrável (tem um comprimento finito). Vou assumir que a fronteira de $\mathcal{D}$ é a união dos gráficos de duas funções, $\partial\mathcal{D} = graf(f_1) \cup graf(f_1)$ como na figura (1).

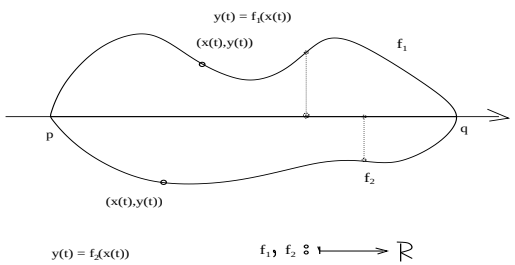

Figura 1: A região $\mathcal{D}$ e sua fronteira.

Sempre o intervalo de parametrização de γ será $[a,b]$
Esta lista está baseada em um texto de apoio publicado na página.

Palavras chave forma diferencial, forma diferencial exata, gradiente, jacobiana, teorema de Green

0.2 Exercícios

1. Primitiva de uma forma diferencial

(a) (V)[ ](F)[ ] $z = F(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$ então

$$(P(x,y),Q(x,y)) = (3x^2, 3y^2)$$

(b) (V)[ ](F)[ ] $z = F(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$ então

$$(P(x,y),Q(x,y)) = (3x^2 - 3y, -3x + 3y^2)$$

(c) (V)[ ](F)[ ] $\oint_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b P(x(t),y(t))y'(t)dt + \int_a^b Q(x(t),y(t))x'(t)dt$

(d) (V)[ ](F)[ ] $\oint_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b P(x(t),y(t))x'(t)dt + \int_a^b Q(x(t),y(t))y'(t)dt$

(e) (V)[ ](F)[ ] Se $(P,Q) = grad(F) = (F_x, F_y)$ então

$$I = \oint_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy \tag{1}$$

$$I = \int_a^b J(F)((x(t),y(t)) \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} dt = \tag{2}$$

$$I = F(x(b),y(b)) - F(x(a),y(a)) \tag{3}$$

pelo Teorema Fundamental do Cálculo. Se γ for a fronteira da região $\mathcal{D}$, será uma curva fechada e então $I = 0$ porque

$$F(x(b),y(b)) = F(x(a),y(a));$$

2. Integral dupla Considere que uma região $\mathcal{D}$ tenha por fronteira a união dos gráficos de duas funções f_1, f_2, como na figura (1), página 1 e que $z = F(x,y)$, definida num domínio que contenha $\mathcal{D}$, seja integrável.

(a) (V)[ ](F)[ ]

$$I = \int_{\mathcal{D}}\int F(x,y)dxdy = \int_{\mathcal{D}}\int F(x,y)dydx = \tag{4}$$

$$I = \int_a^b\int_{f_1}^{f_2} F(x,y)dydx = -\int_a^b\int_{f_2}^{f_1} F(x,y)dydx \tag{5}$$

(b) (V)[ ](F)[ ] Considere $\mathcal{D}$ o disco de centro na origem e raio 1, $z = F(x,y) = xy$ então

$$I = \int_{\mathcal{D}}\int F(x,y)dxdy = \int_{\mathcal{D}}\int F(x,y)dydx = \tag{6}$$

$$I = \int_a^b\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} F(x,y)dydx = -\int_a^b\int_{f_2}^{f_1} F(x,y)dydx = 1 \tag{7}$$

(c) (V)[ ](F)[ ] Considere $\mathcal{D}$ o disco de centro na origem e raio 1, $z = F(x,y) = xy$ então

$$I = \int\int_{\mathcal{D}} F(x,y)dxdy = \int\int_{\mathcal{D}} F(x,y)dydx = \tag{8}$$

$$I = \int_a^b \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} F(x,y)dydx = -\int_a^b \int_{f_2}^{f_1} F(x,y)dydx = 0 \tag{9}$$

(d) (V)[ ](F)[ ] Considere $\mathcal{D}$ o disco de centro no ponto $(0,1)$ e raio 1, $z = F(x,y) = xy$ então

$$I = \int\int_{\mathcal{D}} F(x,y)dxdy = \int\int_{\mathcal{D}} F(x,y)dydx = \tag{10}$$

$$I = \int_a^b \int_{-\sqrt{1-x^2}+1}^{\sqrt{1-x^2}+1} F(x,y)dydx = -\int_a^b \int_{f_2}^{f_1} F(x,y)dydx = 0 \tag{11}$$

(e) (V)[ ](F)[ ] Considere $\mathcal{D}$ o disco de centro no ponto $(0,1)$ e raio 1, $z = F(x,y) = xy$ então

$$I = \int\int_{\mathcal{D}} F(x,y)dxdy = \int\int_{\mathcal{D}} F(x,y)dydx = \tag{12}$$

$$I = \int_a^b \int_{-\sqrt{1-x^2}+1}^{\sqrt{1-x^2}+1} F(x,y)dydx = -\int_a^b \int_{f_2}^{f_1} F(x,y)dydx = 1 \tag{13}$$

3. versão trivial do teorema de Green Considere $z = F(x,y), P, Q$ de acordo com a notação no *caput* da lista, com **mais uma hipótese**, a fronteira, pode ser descrita por duas funções f_1, f_2 de OX em OY ou, alternativamente, por duas funções g_1, g_2 de OY em OX, como está ilustrado na figura (2).

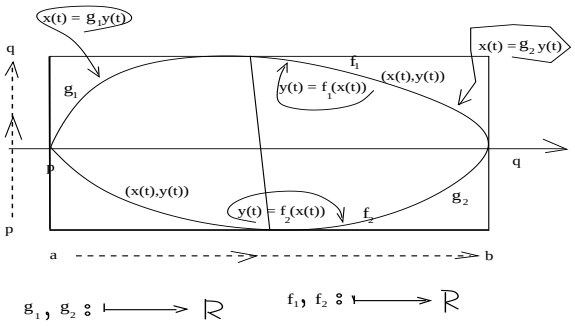

Figura 2: fronteira descrita por gráfico de funções

(a) (V)[ ](F)[ ]

$$\int\int_{\mathcal{D}} (Q_x - P_y)dxdy = \int\int_{\mathcal{D}} (Q_x - P_y)dydx$$

(b) (V)[ ](F)[ ]

$$I = \int\int_{\mathcal{D}} (Q_x - P_y)dydx = \int\int_{\mathcal{D}} Q_x dxdy - \int\int_{\mathcal{D}} P_y dydx \tag{14}$$

(c) (V)[ ](F)[ ]

$$I_1 = \int\int_{\mathcal{D}} Q_x dxdy = \int_p^q \int_{g_1}^{g_2} Q_x dxdy \tag{15}$$

(d) (V)[ ](F)[ ]

$$I_2 = \int\int_{\mathcal{D}} P_y dydx = \int_a^b \int_{f_1}^{f_2} P_y dydx \tag{16}$$

(e) (V)[ ](F)[ ]

$$I = \int\int_{\mathcal{D}} (Q_x - P_y)dydx = \int_a^b \int_{g_1}^{g_2} Q_x dydx - \int_a^b \int_{f_1}^{f_2} P_y dxdy \tag{17}$$

4. Teorema de Green - caso trivial Com as mesma notações da questão 3

(a) (V)[ ](F)[ ]

$$I_1 = \int\int_{\mathcal{D}} Q_x dxdy = \int_p^q \int_{g_1}^{g_2} Q_x dxdy = \int_p^q Q(x,y)|_{x=g_1(y)}^{x=g_2(y)} dy \tag{18}$$

(b) (V)[ ](F)[ ]

$$I_1 = \int_p^q Q(x,y)|_{x=g_1(y)}^{x=g_2(y)} dy = \oint_{\partial\mathcal{D}} Q(x,y)dy \tag{19}$$

é uma integral sobre um domínio de dimensão, uma integral de linha.

(c) (V)[ ](F)[ ]

$$I_2 = \int_a^b \int_{f_1}^{f_2} P_y dy dx = \int_a^b P(x,y)|_{f_1}^{f_2} dx = \oint_{\partial\mathcal{D}} P(x,y)dx \qquad (20)$$

é uma integral sobre um domínio de dimensão, uma integral de linha.

(d) (V)[ ](F)[ ]

$$I = \int_{\mathcal{D}} \int (Q_x - P_y) dy dx \oint_{\partial\mathcal{D}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \qquad (21)$$

é uma integral sobre um domínio de dimensão, uma integral de linha.

(e) (V)[ ](F)[ ] **Teorema de Green**

$$\int_{\mathcal{D}} \int (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dy dx = \oint_{\partial\mathcal{D}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \qquad (22)$$

5. Aplicações do Teorema de Green

(a) (V)[ ](F)[ ] Se $\mathcal{D}$ for o quadrado com a diagonal nos pontos $(0,0),(1,1)$ e γ for sua fronteira, o valor de $\oint_\gamma xdx + xydy$ é 2.

(b) (V)[ ](F)[ ] Se $\mathcal{D}$ for o círculo de raio 1 centrado na origem e γ for sua fronteira, o valor de $\oint_\gamma xdx + ydy$ é π.

(c) (V)[ ](F)[ ] Se $\mathcal{D}$ for o círculo de raio 1 centrado na origem e γ for sua fronteira, o valor de $\oint_\gamma (x - y^3)dx + x^3dy$ é $3\frac{\pi}{2}$.

(d) (V)[ ](F)[ ] Se o teorema de Green for aplicável a uma região $\mathcal{D}$ então, a área de $\mathcal{D}$ é $\frac{1}{2}\oint xdy - ydx$.

(e) (V)[ ](F)[ ] Se $\mathcal{D}$ for a região limitada por $|x| + |y| = 4$ e externa ao círculo unitário, que pode ser vista na figura (3) página 6, o valor da integral

$$\int_{\mathcal{D}} \int x^2 + y^2 dx dy$$

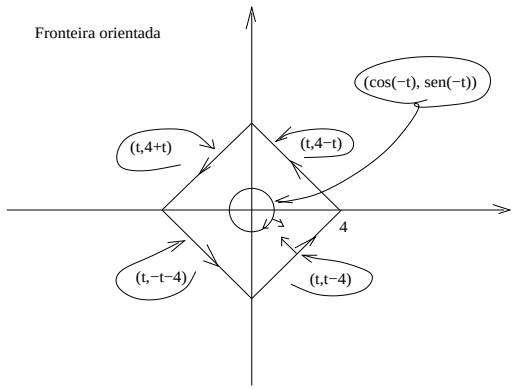

Figura 3: A região $\mathcal{D}$

pode ser obtido com os cálculos

$$\begin{aligned}
&I = \int_{\mathcal{D}} \int (x^2 + y^2) dx dy = \oint_{\partial\mathcal{D}} Pdx + Qdy \\
&I = \frac{1}{3}\oint_\gamma (x - y^3)dx + x^3dy \ ; \ \gamma = \partial\mathcal{D} \\
&I = \frac{1}{3}(I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5) \\
&I_1 = \int_4^0 t - (4-t)^3) - t^3 dt = -\int_4^0 4^3 - 49t + 12t^2 dt \\
&I_2 = \int_0^{-4} t - (4+t)^3 + t^3 dt \\
&I_3 = \int_{-4}^0 t + (t+4)^3 - t^3 dt \\
&I_4 = \int_0^4 t - (t-4)^3) + t^3 dt \\
&I_5 = -\int_0^{2\pi} cos(t)sin(t) + sen^4(t)) + cos^4(t) dt \\
&I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0; I_5 = -\int_0^{2\pi} cos(t)sin(t)dt - 2\int_0^{2\pi} sen^4(t)dt \\
&I_5 = -2\int_0^{2\pi} sen^4(t)dt = -3\frac{\pi}{2}
\end{aligned} \qquad (23)$$