Cálculo II | **Lista número 04b**, 21 de setembro de 2010
Integral de linha | **tarcisio.praciano@gmail.com**
prof. T. Praciano-Pereira | **Dep. de Computação** UeVA

alun@:

www.multivariado.sobralmatematica.org
Documento produzido com LaTeX | sis. op. Debian/Gnu/Linux

Data da entrega da lista: dia 27 de Setembro, segunda-feira. Observe o nome do arquivo, "04b.pdf" "04b.doc" sem letras maiúsculas, por favor!

0.1 Objetivo

Compreender a relação entre somas de Riemann e a integral, aqui: comprimento de arco, e integral de linha e também integral de superfícies.

Esta lista está baseada no texto de apoio à lista 04. Procure nos livros de Cálculo pelas palavras chave.

Palavras chave: baricentro, centro de massa, comprimento de arco, coordenadas esféricas, curvas, curvas sobre superfícies, integral de linha, medida de objetos no espaço, parametrização de curvas, parametrização de superfícies, valor médio integral. parametrizaçao de curvas, variedades.

Definição 1 (baricentro) *Centro de massa*

$$\frac{1}{med(A)}\int_A f(t)dt \tag{1}$$

em que $f(t)$ representa a parametrização de uma variedade. Por exemplo, se quisermos calcular o centro de massa de uma curva, A é o intervalo de parametrização, $f(t)$ é o conjunto de coordenadas da curva:

$$f(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$$

em que n é a dimensão da variedade onde a curva se encontra imersa. Portanto a integral na equação (1) está mal definida. Os exemplos vão torná-la mais clara.

O baricentro é simplesmente o valor *médio integral*.

1 Exercícios

1. Centro de gravidade de um arame A equação $f(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ são as equações parametricas de um *arame* em 3D. Algumas medidas tomadas em diversos pontos $f(t_k)$ revelam a massa $m(t_k) = (m_1(t_k), m_2(t_k), m_3(t_k))$ em uma seleção de pontos do arame (de pontos da parametrização).

   (a) (V)[ ](F)[ ] A

   (b) (V)[ ](F)[ ] A expressão

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)m(t_k)(t_{k+1} - t_k)$$

   não tem o menor sentido se não for indicado qual é o intervalo de parametrização.

   (c) (V)[ ](F)[ ] Se o intervalo de parametrização for $[a, b]$, em que a, b são dois valores conhecidos, então

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)m(t_k)(t_{k+1} - t_k)$$

   ainda não tem sentido porque não esta clara a "multiplicação indicada na soma".

   (d) (V)[ ](F)[ ] Se o intervalo de parametrização for $[a, b]$, em que a, b são dois valores conhecidos, então a massa média (baricentro) do arame é aprxoximadamente

$$\frac{1}{b-a}\sum_{k=0}^{n-1} f(t_k) \cdot m(t_k)(t_{k+1} - t_k)$$

   em que dentro da soma se tem um produto escalar de dois vetores.

   (e) (V)[ ](F)[ ] Se o intervalo de parametrização for $[a, b]$, em que a, b são dois valores conhecidos, então a massa média (baricentro) do arame é

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t) \cdot m(t)dt$$

   e na integral temos o produto escalar de dois vetores em cada ponto t do intervalo de parametrização.

2. Centro de massa Um *arame* é parametrizado pela equação (sistema de equações)

$$f(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)); t \in [a, b]$$

   como na questão 1.

   (a) (V)[ ](F)[ ]A expressão

$$\frac{1}{b-a}\sum_{k=0}^{n-1} f(t_k) \cdot m(t_k)(t_{k+1} - t_k)$$

   representa uma média aritmética (ponderada) da amostragem de massa ao longo dos pontos $(f(t_k))_{k=0}^{n-1}$ do *arame*.

(b) (V)[ ](F)[ ] Se

$$m(t) = (1, 1, 1) \tag{2}$$
$$f(t) = (t, t, t^2) \tag{3}$$

então

$$\frac{1}{b-a}\sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)\cdot m(t_k)(t_{k+1}-t_k) = \frac{1}{b-a}\sum_{k=0}^{n-1}(2t+t^2)$$

(c) (V)[ ](F)[ ] Se

$$m(t) = (1, 1, 1) \tag{4}$$
$$f(t) = (t, t, t^2) \tag{5}$$

então

$$\frac{1}{b-a}\sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)\cdot m(t_k)(t_{k+1}-t_k) = \frac{1}{b-a}\sum_{k=0}^{n-1}(2t_k+t_k^2)(t_{k+1}-t_k)$$

(d) (V)[ ](F)[ ] Se

$$m(t) = (1, 1, 1) \tag{6}$$
$$f(t) = (t, t, t^2) \tag{7}$$

então

$$\frac{1}{b-a}\sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)\cdot m(t_k)(t_{k+1}-t_k) \to \frac{1}{b-a}\int_a^b (2t+t^2)dt = t^2 + \frac{t^3}{3}\Big|_a^b$$

(e) (V)[ ](F)[ ] Se

$$m(t) = (t, t, t) \tag{8}$$
$$f(t) = (t, t, t^2) \tag{9}$$
$$[a, b] = [0, 4] \tag{10}$$

então

$$\frac{1}{b-a}\sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)\cdot m(t_k)(t_{k+1}-t_k) \to \frac{1}{b-a}\int_a^b (2t^2+t^3)dt = 128$$

3. Regiões do plano

(a) (V)[ ](F)[ ] O sistema de equações

$$\begin{cases} y = & x^2 \\ x+y = 2 & \end{cases} \tag{11}$$

limita um triângulo no plano.

(b) (V)[ ](F)[ ] O sistema de equações

$$\begin{cases} y = & x^2; \\ x+y & = 2; \end{cases} \tag{12}$$

limita uma região do plano que fica inteiramente nos quadradantes I e II.

(c) (V)[ ](F)[ ] O sistema de equações

$$\begin{cases} y^2 = & x+3; \\ y^2 = & x+5; \end{cases} \tag{13}$$

determinam uma região *limitada* do plano.

(d) (V)[ ](F)[ ] O sistema de equações

$$\begin{cases} y^2 = & x+3; \\ y^2 = & x+5; \end{cases} \tag{14}$$

determinam uma região *não limitada* do plano.

(e) (V)[ ](F)[ ] O sistema de equações

$$\begin{cases} x-2y & = -8; \\ x+3y & = -5; \\ x-2=0; & x-4=0; \end{cases} \tag{15}$$

determina uma região *limitada* do plano com fronteiras paralelas aos eixos coordenados OX e OY

4. Integrais duplas

(a) (V)[ ](F)[ ] O sistema de equações

$$\mathcal{D} = \begin{cases} y = & x^2 \\ x+y = 2 & \end{cases} \tag{16}$$

define uma região do plano e a integral

$$\int_{\mathcal{D}}\int f(x,y)dxdy$$

representa um volume de um sólido com base $\mathcal{D}$ limitado na vertical pelo gráfico de f e na horizontal pela região $\mathcal{D}$.

(b) (V)[ ](F)[ ] O sistema de equações

$$\mathcal{D} = \begin{cases} y = & x^2; \\ x+y & = 2; \end{cases} \tag{17}$$

define uma região do plano e a integral

$$\int\int_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy$$

representa um número real que mede um volume.

(c) (V)[ ](F)[ ] O sistema de equações

$$\mathcal{D} = \begin{cases} y^2 = & x+3; \\ y^2 = & x+5; \end{cases} \tag{18}$$

define uma região do plano e a integral

$$\int\int_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy$$

representa um número real que mede um volume.

(d) (V)[ ](F)[ ] O sistema de equações

$$\mathcal{D} = \begin{cases} y^2 = & x+3; \\ y^2 = & x+5; \end{cases} \tag{19}$$

determina uma região *não limitada* do plano e a integral

$$\int\int_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy$$

pode representar um número real que mede um volume.

(e) (V)[ ](F)[ ] O sistema de equações

$$\mathcal{D} = \begin{cases} x-2y & = -8; \\ x+3y & = -5; \\ x-2=0; & x-4=0; \end{cases} \tag{20}$$

determinam uma região do plano e

$$\int\int_{\mathcal{D}} dxdy = \frac{49}{3}$$

5. Curvas, superfícies $z = F(x,y) = x^2 - 3xy + y^3$

(a) (V)[ ](F)[ ] $\{(x,y);\ F(x,y) = 4\}$ é um conjunto do plano XOY que corresponde aos pontos de altura 4 na superfície $z = F(x,y)$

(b) (V)[ ](F)[ ] O ponto (a,b,c); $cF(a,b)$ é um ponto da superfície $z = F(x,y)$, $\{(x,y);\ F(x,y) = c\}$ é a curva de nível $\underline{c}$ da superfície $z = F(x,y)$.

(c) (V)[ ](F)[ ] O ponto (a,b,c); $cF(a,b)$ é um ponto da superfície $z = F(x,y)$, derivada implícita de $F(x,y) = c$ é a expressão

$$F_x dx + F_y dy = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0$$

(d) (V)[ ](F)[ ] O ponto (a,b,c); $cF(a,b)$ é um ponto da superfície $z = F(x,y)$, $\{(x,y);\ F(x,y) = c\}$ é a curva de nível $\underline{c}$ da superfície $z = F(x,y)$. A derivada implícita de $z = F(x,y)$ mostra que o vetor

$$(A,B); A = F_x(a,b); B = F_y(a,b);$$

é perpendicular à curva de nível no ponto (a,b).

(e) (V)[ ](F)[ ] Posso usar a derivada implícita de $z = F(x,y)$ para descobrir uma reta tangente à curva de nível $\underline{c}$ fazendo

$$\begin{cases} A = F_x(a,b); B = F_y(a,b); \\ A(x-a) + B(y-b) = 0 \end{cases} \tag{21}$$