Cálculo II **Lista 04** 13 de setembro de 2010
medida: arcos e superfície **tarcisio.praciano@gmail.com**
prof. T. Praciano-Pereira **Dep. de Computação** UeVA

alun@:

www.multivariado.sobralmatematica.org
Documento produzido com LaTeX sis. op. Debian/Gnu/Linux

Data da entrega da lista: dia 20 de Setembro , segunda-feira.

0.1 Objetivo

Esta lista está baseada numa página de apoio que trata da medida de objetos no espaço, em particular comprimento de arcos e a medida de superfícies limitadas por uma fronteira.

Palavras chave: comprimento de arco, coordenadas esféricas, curvas, curvas sobre superfícies, integral de linha, medida de objetos no espaço, parametrizaçao de curvas, variedades.

Notação: $z = F(x, y)$ é uma função diferenciável, $\mathcal{D}_F$ é o domínio de F,

$$\gamma(t) = (x(t), y(t))$$

é uma variedade de dimensão 1 (uma curva) contida em $\mathcal{D}_F$. As funções $x(t), y(t)$ são as *funções coordenadas* da curva γ.

Se for preciso, vou escrever $\gamma*$ para representar a variedade de dimensão 1 - diferenciar da equação $\gamma(t)$ que é uma função.

1 Exercícios

1. Parametrização de uma curva numa superfície Nesta questão estou considerando uma variedade de dimensão 2, $graf(F)$ - gráfico da função $z = F(x, y)$ sobre a qual estou *montando* curvas ou aproximando-as com poligonais, estou montando variedades de dimensão 1 sobre $graf(F)$.

   (a) (V)[ ](F)[ ] Se $\gamma* \subset \mathcal{D}_F$ então $(x(t), y(t), z(t)); z(t) = F(x(t), y(t))$ é uma parametrização da curva-imagem por F na superfície $graf(F)$.

   (b) (V)[ ](F)[ ] Se $\gamma* \subset \mathcal{D}_F$ então

   $$(x(t), y(t), z(t)); z(t) = F(x(t), y(t)); t \in [a, b]$$

   é uma parametrização da curva-imagem por F na superfície $graf(F)$.

   (c) (V)[ ](F)[ ] Sendo $\gamma*$ uma curva contida no domínio de $z = F(x, y)$ e $(a, b) \in \mathcal{D}_F$ um ponto do domínio, então um vetor tangente ao gráfico de $F(\gamma*)$ é

   $$(x'(t), y'(t), z'(t)); z(t) = F(x(t), y(t));$$

   (d) (V)[ ](F)[ ] Sendo $\gamma*$ uma curva contida no domínio de $z = F(x, y)$ e $(a, b) \in \mathcal{D}_F$ um ponto do domínio, então um vetor tangente ao gráfico de $F(\gamma*)$ é

   $$(x(t) + x'(t), y(t) + y'(t), z(t) + z'(t)); z(t) = F(x(t), y(t));$$

   (e) (V)[ ](F)[ ] Considere $[a, b]$ seja um intervalo de parametrização de uma curva $\gamma* \subset \mathcal{D}_F$. As contas seguintes conduzem aos vértices de uma poligonal que aproxima $\gamma*$:

   $$\Delta t = \frac{b-a}{n}; n \in \mathbf{N}; \tag{1}$$

   $$t_0 = a; t_k = a + k\Delta t; k \in \{0, \ldots, n-1\}; \tag{2}$$

   $$z(t) = F(x(t), y(t)); z'(t) = \begin{pmatrix} F_x(x(t), y(t)) & F_y(x(t), y(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \tag{3}$$

   $$P_k = (x(t_k) + x'(t_k), y(t_k) + y'(t_k), z(t_k) + z'(t_k)); \tag{4}$$

   Os comandos
   `set arrow from` P_k `to` P_{k+1}
   para $k \in \{0, \ldots, n-1\}$; junto com o comando
   `splot F(x,y)`
   mostram esta poligonal com `gnuplot`.

2. Comprimento de arco Estou usando nesta questão a notação da questão anterior.

   (a) (V)[ ](F)[ ] O comprimento da poligonal (1e) referida na questão anterior (mas possivelmente não obtida) é

   $$\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x(t_{k+1}) - x(t_k))^2 + (y(t_{k+1}) - y(t_k))^2 + (z(t_{k+1}) - z(t_k))^2} \tag{5}$$

   (b) (V)[ ](F)[ ] O comprimento da poligonal 1e referida na questão anterior (mas possivelmente não obtida) é

   $$\sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_{k+1}) \sqrt{\frac{(x(t_{k+1}) - x(t_k))^2}{(t_{k+1} - t_{k+1})^2} + \frac{(y(t_{k+1}) - y(t_k))^2}{(t_{k+1} - t_{k+1})^2} + \frac{(z(t_{k+1}) - z(t_k))^2}{(t_{k+1} - t_{k+1})^2}} \tag{6}$$

   (c) (V)[ ](F)[ ] A soma que aparece no item anterior é claramente uma soma de Riemann associada ao intervalo de parametrização $[a, b]$ e, consequentemente o limite destas somas, se existirem é

   $$\int_a^b \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2} dt \tag{7}$$

(d) (V)[ ](F)[ ] A soma que aparece no item anterior é claramente uma soma de Riemann associada ao intervalo de parametrização $[a, b]$ e, consequentemente o limite destas somas, se existirem é

$$\int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt \tag{8}$$

(e) (V)[ ](F)[ ] $z = F(x, y) = x^2 + y^2$, $\mathcal{D}$ é um círculo de centro na origem e raio 4. $2\gamma*$ é o círculo de raio 2 de centro na origem e $F(\gamma*)$ é a imagem de $\gamma*$ sobre a superfície $graf(F)$. O perímetro de $F(\gamma*)$ é 8π.

3. Comprimento de arco Considere $F(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$

(a) (V)[ ](F)[ ] O domínio de F é o plano $\mathbf{R}^2$.

(b) (V)[ ](F)[ ] O círculo unitário

$$\mathbf{S}^1 = \{(\cos(t), \sin(t)) \ ; \ t \in [0, 2\pi]\}$$

que se encontra no domínio de F tem uma imagem, Γ, sobre a superfície $graf(F)$. O comprimento de arco desta imagem é dado pelos cálculos

$$\text{uma parametrização de } \Gamma \tag{9}$$

$$t \mapsto (x(t), y(t), z(t)) = (\cos(t), \sin(t), 1) \tag{10}$$

$$\text{O cálculo do comprimento do arco} \tag{11}$$

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{\cos(t)^2 + \sin(t)^2 + \frac{1}{\cos(t)^2+\sin(t)^2}} \ dt = \tag{12}$$

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1+1} \ dt = 2\sqrt{2}\pi \tag{13}$$

é o perímetro de um círculo de raio $\sqrt{2}$

(c) (V)[ ](F)[ ] O círculo unitário

$$\mathbf{S}^1 = \{(\cos(t), \sin(t)) \ ; \ t \in [0, 2\pi]$$

que se encontra no domínio de F tem uma imagem Γ sobre a superfície $graf(F)$. O comprimento de arco desta imagem é dado pelos cálculos

$$\text{uma parametrização de } \Gamma \tag{14}$$

$$t \mapsto (x(t), y(t), z(t)) = (\cos(t), \sin(t), 1) \tag{15}$$

$$\text{O cálculo do comprimento do arco} \tag{16}$$

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin(t))^2 + \cos(t)^2 + 0} \ dt = \tag{17}$$

$$\int_0^{2\pi} dt = 2\pi \tag{18}$$

é o perímetro de um círculo de raio 1 que é a imagem de S^1 sobre o gráfico de F - o inverso do raio 1 é também 1.

(d) (V)[ ](F)[ ] O círculo

$$\mathbf{S}^1 + (3, 4) = \{(\cos(t), \sin(t)) + (-3, 4) \ ; \ t \in [0, 2\pi]\}$$

está centrado no ponto $(-3, 4)$ e sua imagem, Γ, na superfície de $F(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ tem por perímetro I;

$$\text{uma parametrização de } \Gamma \tag{19}$$

$$t \mapsto (x(t), y(t), z(t)) = (\cos(t) - 3, \sin(t) + 4, \frac{1}{(\cos(t)-3)^2+(\sin(t)+4)^2}) \tag{20}$$

$$I = \int_0^{2\pi} \sqrt{26 - 6\cos(t) + 8\sin(t) + \frac{1}{26-6\cos(t)+8\sin(t)}} dt \tag{21}$$

(e) (V)[ ](F)[ ] O círculo

$$\mathbf{S}^1 + (-3, 4) = \{(\cos(t), \sin(t)) + (-3, 4) \ ; \ t \in [0, 2\pi]\}$$

está centrado no ponto $(-3, 4)$, e sua imagem, Γ, na superfície de $F(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ tem por perímetro I;

$$\text{uma parametrização de } \Gamma \tag{22}$$

$$t \mapsto (\cos(t) - 3, \sin(t) + 4, \frac{1}{(\cos(t)-3)^2+(\sin(t)+4)^2}) \tag{23}$$

$$I = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{h(t)} dt \tag{24}$$

$$h(t) = \sin^2(t) + \cos^2(t) + (\frac{-2(\cos(t)-3)\sin(t)+2(\sin(t)+4)\cos(t)}{(26-6\cos(t)+8\sin(t))^2})^2 \tag{25}$$

$$h(t) = 1 + (\frac{6\sin(t)+8\cos(t)}{(26-6\cos(t)+8\sin(t))^2})^2 \tag{26}$$

$$I = \int_0^{2\pi} \sqrt{h(t)} dt \approx 6.28401293150277564066 \tag{27}$$

O programa `exer04_01_e.calc` foi feito para elaborar esta questão. Ver também `exer04_01_f.calc`

4. Integrais múltiplas

(a) (V)[ ](F)[ ] A integral de $F(x, y) = x^2 + y^2$ sobre o domínio

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq x\}$$

vale $\frac{1}{2}$.

(b) (V)[ ](F)[ ] A integral de $F(x, y) = x^2 + y^2$ sobre o domínio

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq x\}$$

vale $\frac{1}{3}$.

(c) (V)[ ](F)[ ] O domínio D é a região do plano limitada pela sistema de equações

$$\begin{cases} 0 \leq x; \\ x^2 \leq y \leq 1 \end{cases} ; \int\int_D y^3 dxdy = 0 \tag{28}$$

(d) (V)[ ](F)[ ] O domínio D é a região do plano limitada pela sistema de equações

$$\begin{cases} 0 \leq x; \\ x^2 \leq y \leq 1 \end{cases} ; \int\int_D y^3 dxdy = \frac{1}{9} \tag{29}$$

(e) (V)[ ](F)[ ] O domínio D é a região do plano limitada pela sistema de equações

$$\begin{cases} 0 \leq x; \\ x^2 \leq y \leq 1 \end{cases} ; \int\int_D y^3 dxdy = \frac{2}{9} \tag{30}$$

5. Coordenadas esféricas Vamos calcular o volume da esfera (que já conhecemos) para aprender a usar coordenadas esféricas.

(a) (V)[ ](F)[ ] Dado o sistema de equações

$$\begin{cases} x = & \rho\cos(\theta)\sin(\alpha) \\ y = & \rho\sin(\theta)\sin(\alpha) \\ z = & \rho\cos(\alpha) \end{cases} \tag{31}$$

então

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

(b) (V)[ ](F)[ ] Dado o sistema de equações

$$\begin{cases} x = & \rho\cos(\theta)\sin(\alpha) \\ y = & \rho\sin(\theta)\sin(\alpha) \\ z = & \rho\cos(\alpha) \end{cases} \tag{32}$$

então

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho$$

(c) (V)[ ](F)[ ] Dado o sistema de equações

$$\begin{cases} x = & \rho\cos(\theta)\sin(\alpha) \\ y = & \rho\sin(\theta)\sin(\alpha) \\ z = & \rho\cos(\alpha) \end{cases} \tag{33}$$

então

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$$

(d) (V)[ ](F)[ ] Se U for uma esfera de raio r e centrada na origem, então

$$\int_U\int\int dxdydz \tag{34}$$

é o volume de U

(e) (V)[ ](F)[ ] Se U for uma esfera de raio r e centrada na origem, então

$$\begin{cases} dx = & \cos(\theta)\sin(\alpha)d\rho - \rho\sin(\theta)\sin(\alpha)d\theta + \rho\cos(\theta)\cos(\alpha)d\alpha \\ dy = & \sin(\theta)\sin(\alpha)d\rho + \rho\cos(\theta)\sin(\alpha)d\theta + \rho\sin(\theta)\cos(\alpha)d\alpha \\ dz = & \cos(\alpha)d\rho - \rho\sin(\alpha)d\alpha \end{cases} \tag{35}$$

$$dxdydz = \rho^2\sin(\alpha)d\rho d\theta d\alpha \tag{36}$$

$$\int_U\int\int dxdydz = \int_0^r\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \rho\sin(\alpha)d\rho d\theta d\alpha = \tfrac{4}{3}\pi r^3 \tag{37}$$