Cálculo II **Lista 02**
Plano tangente tarcisio.praciano@gmail.com
T. Praciano-Pereira **Dep. de Computação - UeVA**

Data da entrega desta lista

alun@:

Documento produzido com LaTeX sis. op. Debian/Gnu/Linux
é segunda=-feira, 30 de Agosto de 2010.

0.1 Objetivo

Derivadas parciais, plano tangente, vetor perpendicular. Somas de Riemann para o cálculo aproximado da integral dupla.

Os programa da série `exer02_*.gnuplot` se encontram no link programas e devem ser usados como laboratórios para esta lista.

Notação: Para as derivadas parciais podemos usar a notação mais compacta:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x \tag{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y \tag{2}$$

Palavras chave derivada parcial, integral dupla, jacobiana, plano tangente, somas de Riemann, vetor perpendicular.

0.2 Exercícios

1. Gráficos de funções O programa `exer02_01_02.gnuplot` faz gráfico de

$$z = f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2 + 1};$$

(a) (V)[ ](F)[ ] Posso escrever $z = f(x,y) = v(x,y)/u(x,y)$ e está assim em `exer02_01_02.gnuplot`

(b) (V)[ ](F)[ ] Escrevendo $z = f(x,y) = v(x,y)/u(x,y)$ então

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{v_x u(x,y) - v(x,y)u_x}{u(x,y)^2}$$

(c) (V)[ ](F)[ ] Escrevendo $z = f(x,y) = v(x,y)/u(x,y)$ então

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{v_y u(x,y) - v(x,y)u_y}{u(x,y)^2}$$

(d) (V)[ ](F)[ ] A equação de um plano, em 3D, passando pelo ponto $(a, b, f(a,b))$ e tangente, neste ponto, ao gráfico da função $z = f(x,y)$ é

$$P(x,y) = f(a,b) - A(x-a) - B(y-b); \tag{3}$$

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}|_{(a,b)}; B = \frac{\partial f}{\partial y}|_{(a,b)}; \tag{4}$$

e os vetores $(A, B, 1)$, $(A, B, -1)$ são perpendiculares a este plano.

2. Derivadas parciais Considere a a função $H(x,y) = \frac{xy}{y\cos(2x+3)}$

(a) (V)[ ](F)[ ] $H_x = \frac{xycos(2x+3)+y^2\sin(2x+3)}{y^2cos^2(2x+3)}$

(b) (V)[ ](F)[ ] $H_x = \frac{xy\cos(2x+3)+2x^2y^2\sin(2x+3)}{y^2\cos^2(2x+3)}$

(c) (V)[ ](F)[ ] $H_y = \frac{xy\cos(2x+3)++xy\cos(2x+3)}{y^2cos^2(2x+3)}$

(d) (V)[ ](F)[ ] A equação do plano tangente ao gráfico de $z = H(x,y)$ no ponto $(-3, 4, H(-3,4))$ é

$$P(x,y) = H(a,b) - A(x-a) - B(y-b); \tag{5}$$

$$(a,b) = (-3,4); A = H_x(a,b); B = H_y(a,b); \tag{6}$$

(e) (V)[ ](F)[ ] O gradiente de $z = H(x,y)$ no ponto $(a,b) = (-3,4)$ é (A,B) com $A = H_x(a,b); B = H_y(a,b)$; e um vetor perpendicular ao gráfico de $z = H(x,y)$ no ponto $(a, b, H(a,b))$ é $(A, B, 1); A = H_x(a,b); B = H_y(a,b)$;

3. Derivadas parciais Seja $F(x,y) = x^2 sin(xy)e^{xy}$

(a) (V)[ ](F)[ ] $F_x(x,y) = 2xsin(xy)e^{xy}$

(b) (V)[ ](F)[ ] $F_x(x,y) = 2xsin(xy)e^{xy} + x^3cos(xy)e^{xy} + x^3sin(xy)e^{xy}$

(c) (V)[ ](F)[ ] $F_y(x,y) = x^3cos(xy)e^{xy} + x^3sin(xy)e^{xy}$

(d) (V)[ ](F)[ ] Um vetor perpendicular ao gráfico de $z = F(x,y)$ no ponto $P = (-1, 0, F(-1,0))$ é $(1, 1, -1)$

(e) (V)[ ](F)[ ] A equação do plano tangente ao gráfico de $z = F(x,y)$ no ponto $P = (-1, 0, F(-1,0))$ é

$$z = -x - y - 1$$

4. Vetor perpendicular Considere a a função

$$G(x,y) = e^{x^2}(y+3)(x+1)$$

(a) (V)[ ](F)[ ]

$$G_x = 2xe^{x^2}(y+3)(x+1) + e^{x^2}(y+3)(x+1) + e^{x^2}(y+3)$$

(b) (V)[ ](F)[ ]

$$G_x = 2xe^{x^2}(y+3)(x+1) + e^{x^2}(y+3)$$

(c) (V)[ ](F)[ ]

$$G_y = e^{x^2}(x+1) + e^{x^2}(y+3)$$

(d) (V)[ ](F)[ ]

$$G_y = e^{x^2}(x+1)$$

(e) (V)[ ](F)[ ] Um vetor perpendicular ao gráfico de $z = G(x,y)$ no ponto $P = (1,-1,G(1,-1))$ é

$$(10e, 2e, -1)$$

5. Integral dupla $z = F(x,y)$ é uma função contínua definida no plano XOY. Considere $\mathcal{D}$ uma região limitada por uma curva retificável (curva integrável). Existe uma região do espaço 3D que fica limitado pelo gráfico de $z = F(x,y)$ e pelo plano XOY sobre $\mathcal{D}$ cujo é expresso por

$$\int\int_{\mathcal{D}} F(x,y)dxdy$$

A figura (1) página 4, sugere um método aproximado de cálculo por somas de Riemann duplas em que usamos somas de cubos para obter o volume algébrico representado pela integral.

(a) (V)[ ](F)[ ]

$$\int\int_{\mathcal{D}} F(x,y)dxdy \approx \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} F(x_k,y_j)\Delta x_k \Delta y_j;$$

(b) (V)[ ](F)[ ]

$$\int\int_{\mathcal{D}} F(x,y)dxdy \approx \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} F(x_k,y_j)\Delta x_k \Delta y_j; (x_k,y_j) \in \mathcal{D}$$

(c) (V)[ ](F)[ ]

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} F(x_k,y_j)\Delta x_k \Delta y_j; (x_k,y_j) \in \mathcal{D} = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} F(x_k,y_j)\Delta x_k \Delta y_j; (x_k,y_j) \in \mathcal{D}$$

logo

$$\int\int_{\mathcal{D}} F(x,y)dydx = \int\int_{\mathcal{D}} F(x,y)dxdy$$

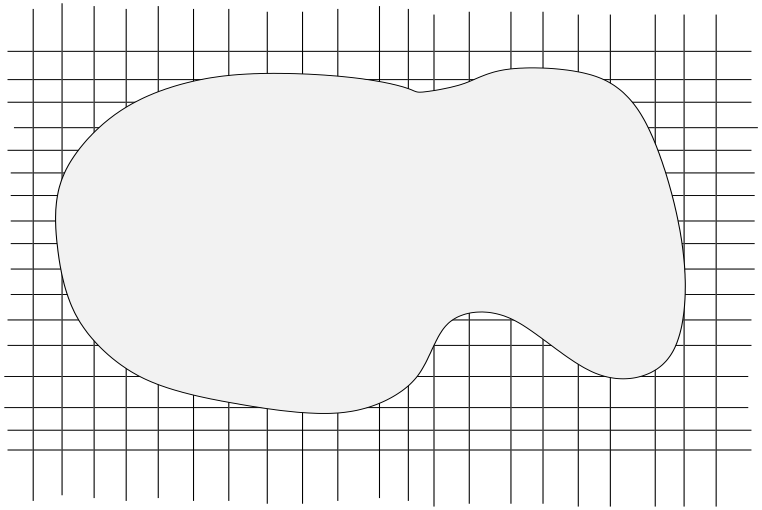

Figura 1:

(d) (V)[ ](F)[ ] Suponha que $\mathcal{D}$ seja um retângulo com lados paralelos aos eixos coordenados,

$$\mathcal{D} = [a,b] \text{ x } [c,d]$$

neste caso a aproximação por somas de Riemann duplas fica

$$\int_a^b\int_c^d F(x,y)dxdy \approx \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} F(a+k\Delta x_k, c+j\Delta y_j)\Delta x_k \Delta y_j$$

(e) (V)[ ](F)[ ] Integral calculada iterativamente

$$\int_a^b\int_c^d F(x,y)dxdy = \int_a^b(\int_c^d F(x,y)dy)dx = \int_c^d(\int_a^b F(x,y)dx)dy$$